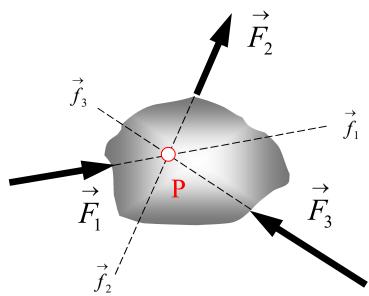


3. Zentrales ebenes Kräftesystem

Eine Gruppe von Kräften, die an einem starren Körper angreifen, bilden ein zentrales Kräftesystem, wenn sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden.



Die zeichnerischen Lösung derartiger Systeme erfolgt mit Hilfe eines Lageplans, aus dem die Lage der Kräfte zueinander hervorgeht und einem Kräfteplan, mit dem die unbekannten Kräfte bzw. Wirkungslinien bestimmt werden.



3.1 Äquivalenz von Kräften

Nach dem Äquivalenzprinzip existiert zu jeder Gruppe von Kräften eine beliebige Anzahl von Kräftegruppen, die die gleiche mechanische Wirkung auf einen Körper besitzen.

3.1.1 Grafische Lösung

Die zeichnerischen Lösung derartiger Systeme erfolgt mit Hilfe eines Lageplans, aus dem die Lage der Kräfte zueinander hervorgeht und einem Kräfteplan, mit dem die unbekannten Kräfte bzw. Wirkungslinien bestimmt werden.

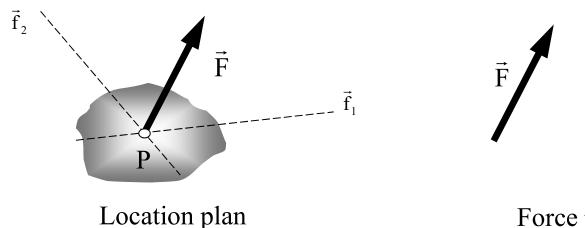
3.1.1.1 Zerlegung von Kräften

3. Zentrales Kräftesystem

Eine Kraft lässt sich in der Ebene eindeutig in **zwei** Einzelkräfte zerlegen, deren Wirkungslinie vorgegeben sind und die sich in einem Punkt schneiden.



Die Bestimmung der Einzelkräfte erfolgt nach folgendem Schema:



Force plan

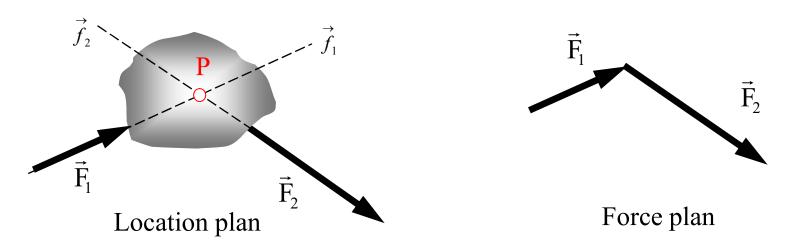
Zunächst wird die Kraft $\vec{\mathbf{f}}$ und die vorgegebenen Wirkungslinien $\vec{\mathbf{f}}_1$ and $\vec{\mathbf{f}}_2$ der noch unbekannten Kräfte $\vec{\mathbf{F}}_1$ und $\vec{\mathbf{F}}_2$ in den Lageplan eingetragen. Sie bilden zusammen ein zentrales Kräftesystem mit dem gemeinsamen Schnittpunkt P.

Anschließend wird die Kraft und die Wirkungslinien in den Kräfteplan übertragen und die Einzelkräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 grafisch bestimmt.

Im Lageplan wird die Kraft $\vec{\mathbf{F}}$ durch die Einzelkräfte $\vec{\mathbf{F}}_1$ und $\vec{\mathbf{F}}_2$ ersetzt.

3.1.1.2 Zusammenfassen von Kräften

Zwei Kräfte \vec{F}_1 and \vec{F}_2 , deren Wirkungslinien sich schneiden, können zu ihrer Resultierenden \vec{R} zusammen gefasst werden. Dazu werden \vec{F}_1 and \vec{F}_2 und der Schnittpunkt P ihrer Wirkungslinien in den Lageplan eingetragen.

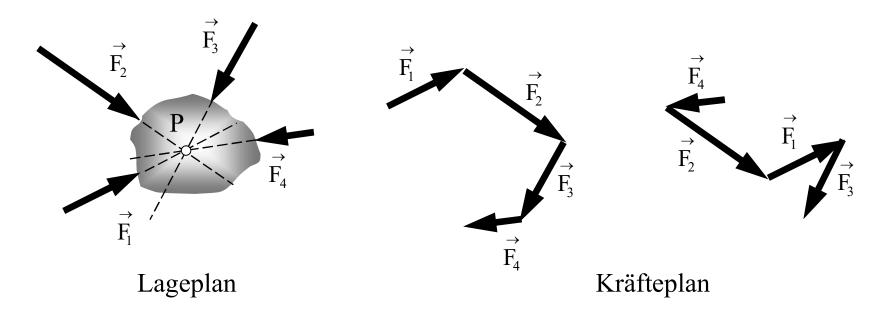


Im Kräfteplan wird die Resultierende \vec{R} grafisch aus den Kräften \vec{F}_1 and \vec{F}_2 bestimmt. Die Resultierende wird anschließend in den Lageplan übertragen.

Die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 werden durch die Resultierende \vec{R} ersetzt. Ihre Wirkungslinie geht durch den Schnittpunkt P.



Das Zusammenfassen mehrerer Kräfte kann durch wiederholtes Zusammenfassen von zwei Kräften realisiert werden.



Die Resultierende ergibt sich durch Verbinden des Anfangspunktes mit dem Endpunkt des gebildeten Kraftecks. Zwischenresultierende werden i. allg. nicht eingetragen.

Alle Kraftvektoren werden mit gleichem Umlaufsinn (Spitze an Anfang) eingetragen. Die Resultierende ist immer den Kraftvektoren entgegengerichtet.



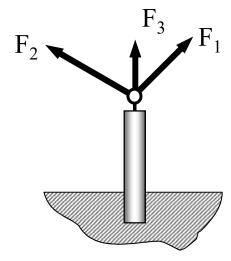
Beispiel: Pfosten mit drei Kräften

Gegeben: $F_1 = 30 \text{ kN}, F_2 = 40 \text{ kN und } F_3 = 20 \text{ kN}$

Gesucht: Betrag und Richtung der Resultierenden R

Richtung von F₂ und Betrag von R, wenn diese senkrecht wirken soll

Lageplan



Kräfteplan

Kraftmaßstab:

1 cm = 10 kN





3.1.2 Rechnerische Lösung

Die rechnerische Behandlung von Vektoren erfolgt über ihre skalaren Komponenten, die in Richtung eins vorgegebenen Koordinatensystems definiert werden. In der Ebene existieren zwei von einander unabhängige Koordinaten.

3.1.2.1 Zerlegung von Kräften in ihre skalaren Komponenten

Für ein kartesisch, rechtwinkliges Koordinatensystem ergeben sich die skalaren Komponenten mit

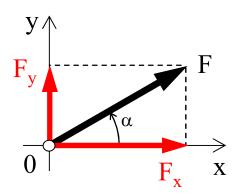
$$F_{x} = F \cdot \cos \alpha$$
$$F_{y} = F \cdot \sin \alpha$$

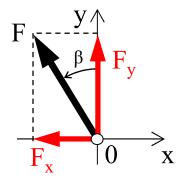
wenn α von der positiven x-Achse abgetragen wird.

Für andere Achsen sind die Gleichungen ggf. unter Berücksichtigung der Orientierung anzupassen

$$F_{x} = -F \cdot \sin \beta$$

$$F_y = F \cdot \cos \beta$$









3.1.2.2 Zusammensetzung von Kräften aus ihren skalaren Komponenten

Für die aus mehreren Kräften \vec{F}_i zusammengesetzte Resultierende \vec{R} gilt:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + ... + \overrightarrow{F}_n = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{F}_i$$

Die skalaren Komponenten der Resultierenden \vec{R} ergeben sich aus der Summe der skalaren Komponenten der Einzelkräfte:

$$R_{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$
 $R_{y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$

Der Betrag der Resultierenden ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras

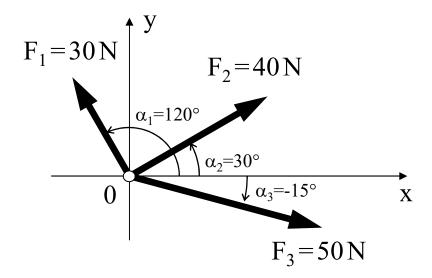
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

und für den Winkel der Resultierenden gegenüber der x-Achse gilt

$$\tan \varphi_{R} = \frac{R_{y}}{R_{x}}$$

Beispiel: Zusammenfassen dreier Kräfte

Gesucht: Betrag und Richtung der Resultierenden

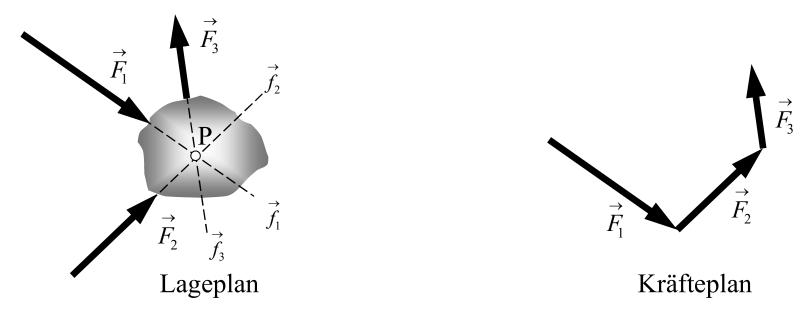




10

3.2 Gleichgewicht von Kräften

Nach dem Trägheitsaxiom befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, wenn er in Ruhe ist oder sich gleichförmig, geradlinig bewegt. Da keine Beschleunigung auftritt, muss die Resultierende aller angreifenden Kräfte Null sein



Kräfte mit gemeinsamen Schnittpunkt heben sich auf, wenn ihre Resultierende verschwindet, d. h. das Krafteck geschlossen ist.

Alle Kräfte besitzen den gleichen Umlaufsinn (Anfang an Ende).



3.2.1 Grafische Lösung

Ein zentrales Kräftesystem befindet sich im statischen Gleichgewicht, wenn das Krafteck geschlossen ist

Mit der Gleichgewichtsbedingung lassen sich für ein ebenes, zentrales Kräftesystem stets zwei unbekannte Größen von Kräften ermitteln:

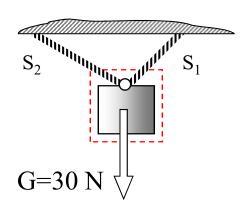
- Unbekannte Beträge zweier Kräfte
- Unbekannte Richtungen zweier Kräfte
- unbekannter Betrag und unbekannte Richtung einer Kraft
- unbekannter Betrag einer Kraft und unbekannte Richtung einer anderen Kraft

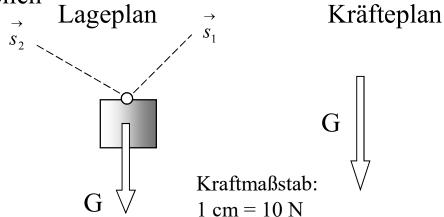
Die Ermittlung der Gleichgewichtskräfte erfolgt grafisch durch vektorielle Addition der angreifenden Kräfte und Bestimmung der unbekannten Kräfte bzw. Richtungen aus der Bedingung, dass das Krafteck im Kräfteplan geschlossen ist.

Mehr als zwei unbekannte Größen lassen sich mit der Gleichgewichtsbedingung für ein ebenes, zentrales Kräftesystem nicht ermitteln.

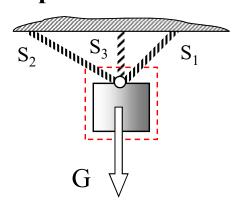


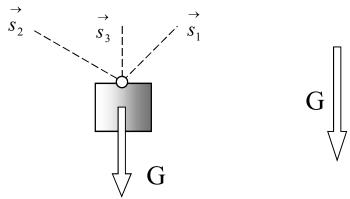
Beispiel 1: Gewicht an zwei Seilen

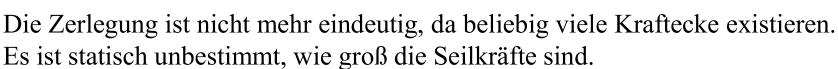




Beispiel 2: Gewicht an drei Seilen



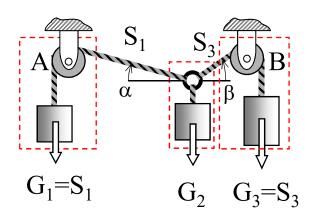


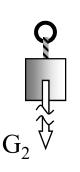


Beispiel 3: Seilzug

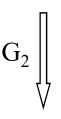
Gegeben: $G_1 = G_2 = 50 \text{ N}, G_3 = 60 \text{ N}$

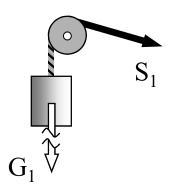
Gesucht: α , β , A, B

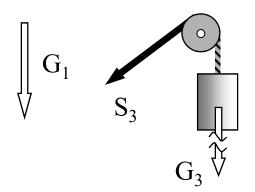


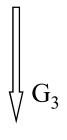


Kraftmaßstab: 1 cm = 20 N













3.2.2 Rechnerische Lösung

Aus der Forderung eines geschlossenen Kraftecks folgt für die Gleichgewichtsbedingung eines zentralen Kräftesystems, dass die Resultierende verschwindet:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \dots + \overrightarrow{F}_n = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{F}_i = 0$$

Die Resultierende ist dann Null, wenn ihre skalaren Komponenten Null sind:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$
 $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$

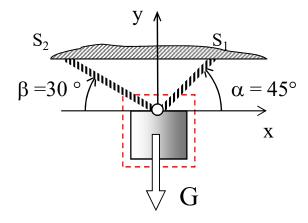
Zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen müssen alle bekannten und Unbekannten Kräfte in das Freikörperbild eingetragen werden.

Die Orientierung der unbekannten Kräfte wird zunächst willkürlich festgelegt. Ergibt die Rechnung einen negativen Betrag der Kraft, so ist die tatsächliche Kraftrichtung entgegengesetzt der angenommenen.

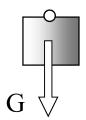
Beispiel: Gewicht an Seilen

Gegeben: $G = 30 \text{ N}, \alpha = 45^{\circ}, \beta = 30^{\circ}$

Gesucht: S_1 und S_2



Freikörperbild:









3.3 Übungen

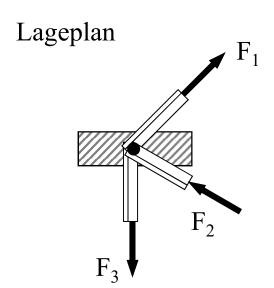


Übung 1: Fundament mit drei längs belasteten Trägern

Gegeben: $F_1 = 50 \text{ kN}, F_2 = 80 \text{ kN und } F_3 = 20 \text{ kN}$

Gesucht: Betrag und Richtung der Resultierenden R

Betrag von F₃, damit R minimal wird



Kräfteplan

Kraftmaßstab:

1 cm = 10 kN

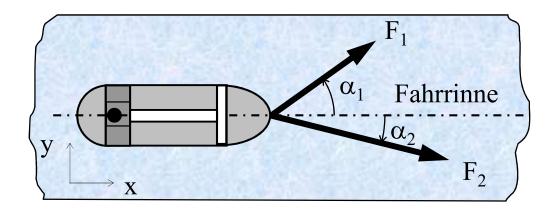




Übung 2: Geschleppter Tanker in Fahrrinne

Gegeben: $F_1 = 50 \text{ KN}$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 15^\circ$

Gesucht: F₂ und R, wenn der Tanker in der Fahrrinne bleiben soll



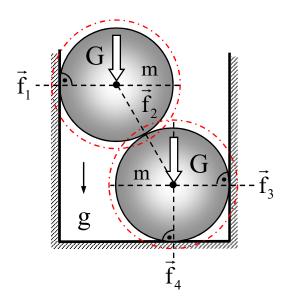
Grafische Lösung:

Analytische Lösung:

Übung 3: Kugeln in zylindrischer Aufnahme (grafische Lösung)

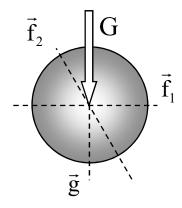
Gegeben: G = 25 N

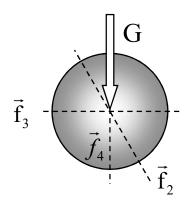
Gesucht: Kontaktkräfte



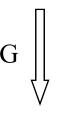
Kraftmaßstab: 1 cm = 10 N

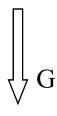
Lageplan





Kräfteplan





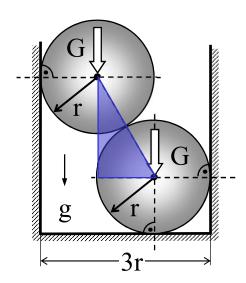


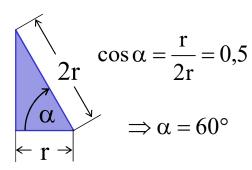


Übung 4: Kugeln in zylindrischer Aufnahme (analytische Lösung)

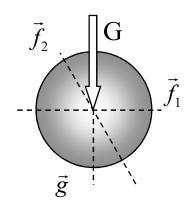
Gegeben: G = 25 N

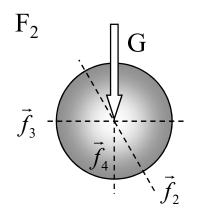
Gesucht: Kontaktkräfte





Freikörperbilder:





Gleichgewichtsbedingung: